ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ SEN

BÀI TOÁN DƯỚI THÁC TRIỂN ĐỐI VỚI LỚP E^{χ}

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
--------------ꕥ📖ꕥ--------------

NGUYỄN THỊ SEN

BÀI TOÁN DƯỚI THÁC TRIỂN ĐỐI VỚI LỚP E^{y}

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số:60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Nguyễn Thị Sen

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng Nhân dịp này tôi xin cám ơn thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THCS Phú Lâm- Bắc Ninh cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2017

Tác giả

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i

LỜI CẢM ƠN ii

MỤC LỤC iii

MỞ ĐẦU 1

1. Lý do chọn đề tài 1
2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu 2
3. Phương pháp nghiên cứu 2
4. Bố cục luận văn 3

Chương 1. CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 4

1.1. Hàm đa điều hòa dưới 4

1.2. Hàm đa điều hòa dưới cực đại 7

1.3. Hàm cực trị tương đối 10

1.4. Toán tử Monge-Ampère phức 14

1.5. Nguyên lý so sánh Bedford-Taylor 16

Chương 2. BÀI TOÁN DƯỚI THÁC TRIỂN TRONG LỚP $E^y(W)$ 21

2.1. Các lớp Cegrell 21

2.2. Dưới thác triển trong lớp $F(W)$ 24

2.3. Dưới thác triển trong lớp E^y 26

KẾT LUẬN 40

TÀI LIỆU THAM KHẢO 41

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ là các miền trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(\Omega)$. Một hàm $\tilde{u} \in PSH(\tilde{\Omega})$ được gọi là dưới thác triển của u nếu với mọi $z \in \Omega$ thì $\tilde{u}(z) \le u(z)$. Năm 1980, Elmir [9] đã đưa ra ví dụ về hàm đa điều hòa dưới trên song đĩa đơn vị mà hạn chế lên một song đĩa nhỏ hơn không có dưới thác triển lên toàn bộ không gian. Bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ đã được giới thiệu bởi Cegrell và gần đây bài toán này nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Năm 2003, Cegrell và A.Zeriahi [7], đã chứng minh rằng nếu $\Omega, \tilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với $\Omega \Subset \tilde{\Omega}$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì tồn tại $\tilde{u} \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ sao cho $\tilde{u} \le u$ trên Ω và $\int_{\tilde{\Omega}} (dd^c \tilde{u})^n \le \int_{\Omega} (dd^c u)^n$. Năm 2005, U. Cegrell, S. Kolodziej và A. Zeriahi trong [6, Định lý 5.1] đã chỉ ra rằng các hàm đa điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ có dưới thác triển toàn cục tới $\mathbb{C}^n$ với cấp tăng logarithm tại vô cùng. Đối với lớp $\mathcal{E}_p(\Omega), p > 0$, bài toán dưới thác triển được nghiên cứu bởi P.H.Hiệp [13]. Tác giả đã chứng minh rằng nếu $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ là các miền siêu lồi và $u \in \mathcal{E}_p(\Omega), p > 0$ thì tồn tại một hàm $\tilde{u} \in \mathcal{E}_p(\tilde{\Omega})$ sao cho $\tilde{u} < u$ trên Ω và $e_p(\tilde{u}) = \int_{\tilde{\Omega}} (-\tilde{u})^p (dd^c \tilde{u})^n \le \int_{\Omega} (-u)^p (dd^c u)^n$. Năm 2009, S.Belnekourchi [2] đã đạt được kết quả về dưới thác triển trong các lớp năng lượng đa phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$. Bài toán dưới thác triển liên quan tới các giá trị biên được quan tâm trong những năm gần đây. Năm 2008,R. Czyz và L. Hed trong [8] đã chỉ ra rằng nếu

Ω_1 và Ω_2 là hai miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n, n \geq 1$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega_1)$ với các giá trị biên $F \in \mathcal{E}(\Omega_1)$ có thác triển $v \in \mathcal{F}(\Omega_2)$ với các giá trị biên $G \in \mathcal{E}(\Omega_2) \cap MPSH(\Omega_2)$, trong đó $MPSH(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω. Năm 2006, J.Wiklund [15] đã chứng minh rằng bài toán dưới thác triển không thể thực hiện trong lớp $\mathcal{E}(\Omega)$. Cụ thể là, với một miền siêu lồi Ω tùy ý, tác giả đã xây dựng một hàm u trong $\mathcal{E}(\Omega)$ không có dưới thác triển tới một miền rộng hơn. Gần đây, dựa trên ý tưởng của J.Wiklund [15], L. Hed đã cho ví dụ chỉ ra rằng bài toán dưới thác triển không thực hiện được trong lớp con hẹp hơn $\mathcal{N}(\Omega)$ của $\mathcal{E}(\Omega)$ (xem ví dụ 5.2 trong [10]). Như vậy, bài toán dưới thác triển luôn thực hiện được trong $\mathcal{F}(\Omega), \mathcal{E}_p(\Omega)$ và $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$, nhưng không phải lúc nào cũng thực hiện được trong $\mathcal{E}(\Omega)$. Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn "*Bài toán dưới thác triển trong lớp* $\mathcal{E}^\psi$" làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}^\psi$.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Trình bày một số tính chất và kết quả cơ sở trong lý thuyết đa thế vị

+ Trình bày một số kết quả về bài toán dưới thác triển trong các lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và $\mathcal{E}^\psi$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 42 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, được viết chủ yếu dựa vào các tài liệu [1], [7] và [12].

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère, nguyên lý so sánh Bedford và Taylor.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. trình bày một số kết quả về các lớp Cegrell, bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$, bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}^{\psi}$. Cụ thể là trong mục 2.1, trình bày một vài lớp các hàm đa điều hòa dưới đã được giới thiệu và nghiên cứu bởi Cegrell cùng với lớp $\mathcal{E}^{\psi}(\Omega)$. Bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$, được trình bày trong mục 2.2. Trong mục 2.3, chúng tôi trình bày một số kết quả về lớp $\mathcal{E}^{\psi}(\Omega)$ và bài toán dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}^{\psi}$.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

Định nghĩa 1.1.1. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda\mapsto u(a+\lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda\in\mathbb{C}: a+\lambda b\in\Omega\}$.

Kí hiệu $PSH(\Omega)$ *là lớp tất cả các hàm đa điều hoà dưới trong* Ω.

Sau đây là một vài tính chất của hàm đa điều hoà dưới:

Mệnh đề 1.1.2. *Nếu* $u,v\in PSH(\Omega)$ *và* $u=v$ *hầu khắp nơi trong* Ω, *thì* $u\equiv v$.

Mệnh đề 1.1.3. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền bị chặn, tức là nếu* Ω *là một tập con mở liên thông bị chặn của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u\in PSH(\Omega)$, *thì hoặc* u *là hằng hoặc với mỗi* $z\in\Omega$,

$$u(z)<\sup_{w\in\partial\Omega}\limsup_{\substack{y\to w\\ y\in\Omega}}u(y).$$

Định lý 1.1.4. *Cho* Ω *là một tập con mở trong* $\mathbb{C}^n$. *Khi đó*

i) Họ $PSH(\Omega)$ *là nón lồi, tức là nếu* α,β *là các số không âm và* $u,v\in PSH(\Omega)$, *thì* $\alpha u+\beta v\in PSH(\Omega)$.

ii) Nếu Ω *là liên thông và* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset PSH(\Omega)$ *là dãy giảm, thì* $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j \in PSH(\Omega)$ *hoặc* $u \equiv -\infty$.

iii) Nếu $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *và nếu* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset PSH(\Omega)$ *hội tụ đều tới* u *trên các tập con compact của* Ω, *thì* $u \in PSH(\Omega)$.

iv) Giả sử $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset PSH(\Omega)$ *sao cho bao trên của nó* $u = \sup\limits_{\alpha\in A} u_\alpha$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên* u^* *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

Mệnh đề 1.1.5. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở,* $\omega \subset \Omega$ *là tập con mở thực sự, khác rỗng của* Ω. *Giả sử* $u \in PSH(\Omega)$, $v \in PSH(\omega)$ *và* $\limsup_{x\to y} v(x) \le v(y)$ *với mọi* $y \in \partial\omega \cap \Omega$. *Khi đó*

$$w = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{trong } \omega \\ u & \text{trong } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

là hàm đa điều hoà dưới trên Ω.

Chứng minh. Rõ ràng w là nửa liên tục trên trên Ω. Chỉ cần chứng tỏ nếu $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{a + \lambda b, |\lambda| \le r\} \subset \Omega$ thì

$$w(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta}b)\,d\theta$$

Với $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$, chọn $r > 0$ đủ bé để

$$\{a + \lambda b, |\lambda| \le r\} \subset \omega$$